**Понятие корня**

Алгебраические выражения, содержащие операцию извлечения корня, называются **иррациональными**.

Корнем *n*-й степени из числа *a* называется такое число *b*, *n*-я степень которого равна *a* (*n* ≥ 2). Обозначается , где *a* - подкоренное выражение (или число), *n* - показатель корня (*n* ≥ 2; *n* ϵ *N*).

По определению , если *bn* = *a*, или .

**Основные свойства корня**

Если корни рассматривать в множестве действительных чисел, то:
     а) корень четной степени из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку;
     б) корень четной степени из отрицательного числа в множестве действительных чисел не существует;
     в) корень нечетной степени из положительного числа имеет только одно действительное значение, которое положительно;
     г) корень нечетной степени из отрицательного числа имеет только одно действительное значение, которое отрицательно;
     д) корень любой натуральной степени из нуля равен нулю.

Действие, посредством которого отыскивается корень *n*-й степени из данного числа *a*, называется извлечением корня *n*-й степени из числа *a*, а результат извлечения корня в виде называют **радикалом**.

Таким образом, множество действительных чисел не замкнуто относительно извлечения корня четной степени, а результат этого действия (корень) не однозначен.

Заметим, что множество действительных чисел замкнуто относительно извлечения корня нечетной степени, а результат этого действия однозначен.

**Арифметический корень и его свойства**

Арифметическим значением корня или арифметическим корнем степени *n* (*n* ≥ 2; *n* ϵ *N*) из положительного числа *a* называется положительное значение корня. Корень из нуля, равный нулю, также будет называться арифметическим корнем, т. е. есть арифметический корень, где *a* ≥ 0, *b* ≥ 0 и *bn* = *a*.

Множество неотрицательных действительных чисел замкнуто относительно извлечения арифметического корня, а результат этого действия однозначен. Это значит, что для любого неотрицательного числа *a* и натурального числа *n* (*n* > 1) всегда найдется, и притом только одно, такое неотрицательное число *b*, что *bn* = *a*.

**Правила действий над корнями**

Для любых действительных чисел *a*, *b* и *c* и натуральных *n* и *k* имеют место следующие правила действий над корнями:

     (1)

     (2)

     (3)

     (4)

     (5)

     (6)

     (7)

     (8)

     (9)

     (10)

     (11)

     (12)

     (13)

     (14)

(*a* - любое действительное число).     (15)

Во множестве действительных чисел рассматриваются корни нечетной степени из любых действительных чисел и корни четной степени из неотрицательных чисел, причем берутся арифметические значения корней.

Замена дробного выражения, у которого числитель или знаменатель (или оба) иррациональны, тождественно равным ему выражением с рациональным числителем (знаменателем) называется исключением иррациональности из числителя (знаменателя) дробного выражения.

При исключении иррациональности из числителя (знаменателя) дробного выражения числитель и знаменатель этого выражения умножают на множитель, сопряженный с числителем (знаменателем).

Сопряженным множителем относительно иррационального выражения *A* называют всякое не равное тождественно нулю выражение *B*, которое в произведении с *A* не содержит знака корня, т. е. *AB* рационально.

Рассмотрим основные случаи исключения иррациональности из знаменателей дробных выражений (аналогично выполняется исключение иррациональности из числителей):

1. Дроби вида , где *n* > *k*, *a* > 0, *A* - некоторое выражение; в качестве множителя, сопряженного со знаменателем, можно взять , так как .

Умножив числитель и знаменатель этой дроби на , получим



2. Дроби вида .

Выражения и взаимно сопряженные, так как , поэтому

при *a* ≥ 0, *b* ≥ 0, *a* ≠ *b*;

, если *a* > 0, *a* = *b*;

при *a* ≥ 0, *b* ≥ 0, *a* ≠ *b*;

3. Дроби вида и .

Выражения и , а также и взаимно сопряжены, так как их произведения (*a* + *b*) и (*a* - *b*) рациональны. Поэтому исключить иррациональность из знаменателей указанных дробей можно следующим образом:



где *a* и *b* - любые действительные числа, причем *a* + *b* ≠ 0.



где *a* и *b* - любые действительные числа, причем *a* ≠ *b*.



где *a* и *b* - любые действительные числа, причем *a* + *b* ≠ 0.



где *a* и *b* - любые действительные числа, причем *a* ≠ *b*.

4. Дроби вида и .

Для выражения сопряженный множитель можно определить из тождества



Если принять , то получим



Следовательно,



где *a* ≠ *b* (*a* ≥ 0, *b* ≥ 0, если *n* - четное; *a*, *b* - любые действительные числа, если *n* - нечетное).

Для выражения сопряженный множитель можно определить из тождества



Если принять , то



Следовательно,



где *a* и *b* - любые действительные числа и *a* + *b* ≠ 0.



при *a* ≥ 0, *b* ≥ 0, *a* ≠ *b*;