**Понятие корня**

Алгебраические выражения, содержащие операцию извлечения корня, называются **иррациональными**.

Корнем *n*-й степени из числа *a* называется такое число *b*, *n*-я степень которого равна *a* (*n* ≥ 2). Обозначается http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010856.JPG, где *a* - подкоренное выражение (или число), *n* - показатель корня (*n* ≥ 2; *n* ϵ *N*).

По определению http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010857.JPG, если *bn* = *a*, или http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010858.JPG.

**Основные свойства корня**

Если корни рассматривать в множестве действительных чисел, то:  
     а) корень четной степени из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку;  
     б) корень четной степени из отрицательного числа в множестве действительных чисел не существует;  
     в) корень нечетной степени из положительного числа имеет только одно действительное значение, которое положительно;  
     г) корень нечетной степени из отрицательного числа имеет только одно действительное значение, которое отрицательно;  
     д) корень любой натуральной степени из нуля равен нулю.

Действие, посредством которого отыскивается корень *n*-й степени из данного числа *a*, называется извлечением корня *n*-й степени из числа *a*, а результат извлечения корня в виде http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010856.JPGназывают **радикалом**.

Таким образом, множество действительных чисел не замкнуто относительно извлечения корня четной степени, а результат этого действия (корень) не однозначен.

Заметим, что множество действительных чисел замкнуто относительно извлечения корня нечетной степени, а результат этого действия однозначен.

**Арифметический корень и его свойства**

Арифметическим значением корня или арифметическим корнем степени *n* (*n* ≥ 2; *n* ϵ *N*) из положительного числа *a* называется положительное значение корня. Корень из нуля, равный нулю, также будет называться арифметическим корнем, т. е. http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010857.JPGесть арифметический корень, где *a* ≥ 0, *b* ≥ 0 и *bn* = *a*.

Множество неотрицательных действительных чисел замкнуто относительно извлечения арифметического корня, а результат этого действия однозначен. Это значит, что для любого неотрицательного числа *a* и натурального числа *n* (*n* > 1) всегда найдется, и притом только одно, такое неотрицательное число *b*, что *bn* = *a*.

**Правила действий над корнями**

Для любых действительных чисел *a*, *b* и *c* и натуральных *n* и *k* имеют место следующие правила действий над корнями:

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010859.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020859.JPG     (1)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010860.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020860.JPG     (2)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010861.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020861.JPG     (3)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010862.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020862.JPG     (4)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010863.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020863.JPG     (5)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010864.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020864.JPG     (6)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010865.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020865.JPG     (7)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010866.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020866.JPG     (8)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010867.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020867.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf030867.JPG     (9)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010868.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020868.JPG     (10)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010869.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020869.JPG     (11)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010870.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020870.JPG     (12)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010871.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020871.JPG     (13)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010872.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020872.JPG     (14)

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010873.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020873.JPG(*a* - любое действительное число).     (15)

Во множестве действительных чисел рассматриваются корни нечетной степени из любых действительных чисел и корни четной степени из неотрицательных чисел, причем берутся арифметические значения корней.

Замена дробного выражения, у которого числитель или знаменатель (или оба) иррациональны, тождественно равным ему выражением с рациональным числителем (знаменателем) называется исключением иррациональности из числителя (знаменателя) дробного выражения.

При исключении иррациональности из числителя (знаменателя) дробного выражения числитель и знаменатель этого выражения умножают на множитель, сопряженный с числителем (знаменателем).

Сопряженным множителем относительно иррационального выражения *A* называют всякое не равное тождественно нулю выражение *B*, которое в произведении с *A* не содержит знака корня, т. е. *AB* рационально.

Рассмотрим основные случаи исключения иррациональности из знаменателей дробных выражений (аналогично выполняется исключение иррациональности из числителей):

1. Дроби вида http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010874.JPG, где *n* > *k*, *a* > 0, *A* - некоторое выражение; в качестве множителя, сопряженного со знаменателем, можно взять http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010875.JPG, так как http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010876.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020876.JPG.

Умножив числитель и знаменатель этой дроби на http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010875.JPG, получим

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010877.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020877.JPG

2. Дроби вида http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010878.JPG.

Выражения http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010879.JPGи http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010880.JPGвзаимно сопряженные, так как http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010881.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020881.JPG, поэтому

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010882.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020882.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf030882.JPGпри *a* ≥ 0, *b* ≥ 0, *a* ≠ *b*;

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010883.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020883.JPG, если *a* > 0, *a* = *b*;

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010884.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020884.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf030884.JPGпри *a* ≥ 0, *b* ≥ 0, *a* ≠ *b*;

3. Дроби вида http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010885.JPGи http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010886.JPG.

Выражения http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010887.JPGи http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010888.JPG, а также http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010889.JPGи http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010890.JPGвзаимно сопряжены, так как их произведения (*a* + *b*) и (*a* - *b*) рациональны. Поэтому исключить иррациональность из знаменателей указанных дробей можно следующим образом:

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010891.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020891.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf030891.JPG

где *a* и *b* - любые действительные числа, причем *a* + *b* ≠ 0.

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010892.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020892.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf030892.JPG

где *a* и *b* - любые действительные числа, причем *a* ≠ *b*.

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010893.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020893.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf030893.JPG

где *a* и *b* - любые действительные числа, причем *a* + *b* ≠ 0.

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010894.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020894.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf030894.JPG

где *a* и *b* - любые действительные числа, причем *a* ≠ *b*.

4. Дроби вида http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010895.JPGи http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010896.JPG.

Для выражения http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010897.JPGсопряженный множитель можно определить из тождества

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010898.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020898.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf030898.JPG

Если принять http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010899.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020899.JPG, то получим

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010900.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020900.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf030900.JPG

Следовательно,

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010901.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020901.JPG

где *a* ≠ *b* (*a* ≥ 0, *b* ≥ 0, если *n* - четное; *a*, *b* - любые действительные числа, если *n* - нечетное).

Для выражения http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010902.JPGсопряженный множитель можно определить из тождества

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010903.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020903.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf030903.JPG

Если принять http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010904.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020904.JPG, то

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010905.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020905.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf030905.JPG

Следовательно,

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010906.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020906.JPG

где *a* и *b* - любые действительные числа и *a* + *b* ≠ 0.

http://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf010907.JPGhttp://www.pm298.ru/reshenie/Mathem/rf020907.JPG

при *a* ≥ 0, *b* ≥ 0, *a* ≠ *b*;